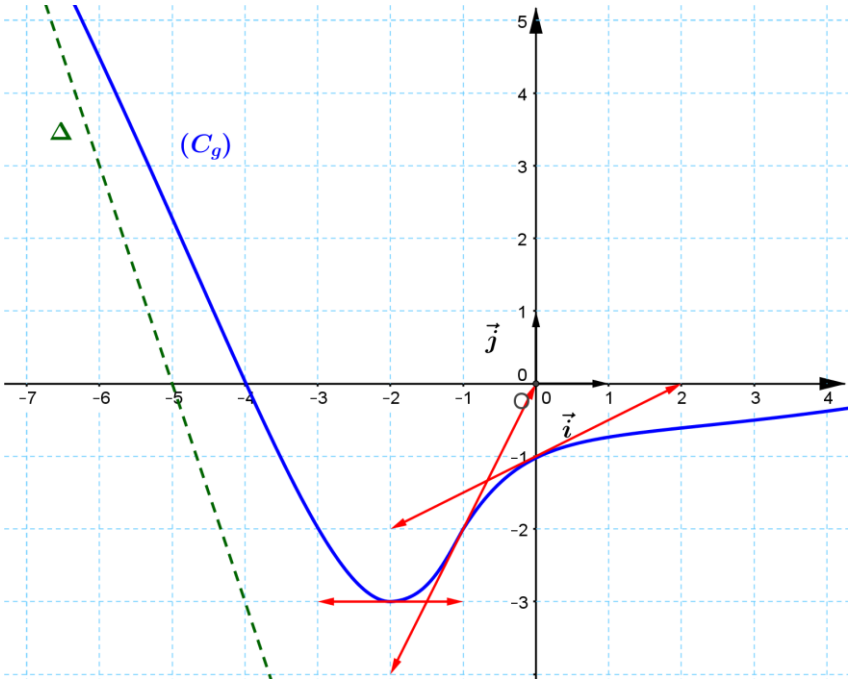
EXERCICE N°1 : 4 points 15 '

Dans le graphique ci-dessous (C_g) est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction g dérivable sur IR.

- (C_g) Possède une asymptote oblique Δ au voisinage de $-\infty$.
- L'axe des abscisses est asymptote à (C_g) au voisinage de $+\infty$.



1°) Déterminer par une lecture graphique :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(g(x)+3x\big)$, $g\circ g(0)$, $(g\circ g)'(0)$ et $g\circ g\big([-2,+\infty[\big)$.

2°) Montrer que l'équation $g'(x)=-1$ admet au moins une solution $c\in\,]-3,-2[$.

3°) Soit f la fonction dérivable sur IR qui s'annule en (-4) et dont la fonction dérivée f' est la fonction g.

La courbe (C_f) représentative de f possède une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

a) Dresser le tableau de variation de f sur IR et donner $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

b) Justifier que (C_f) possède un unique point d'inflexion I qu'on précisera l'abscisse.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°2 : 5 points 20 '

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^{\,2}\right)$.

1°) Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par : $f(x) = x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.

2°) a) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in$ IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer, que pour tout $n \in$ IN, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°3 : 6 points 25 '

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur IR et vérifiant : $f(0) = \frac{1}{4}$ et pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-2

1°) Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[-1,1]$.

2°) Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $-1 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

d) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3°) Soit $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$,pour tout $n \in IN$. Montrer pour tout $n \in IN$, $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq v_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ et en déduire la limite de (v_n).

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com